ÇARPANLARA AYIRMA

• Ortak çarpan parantezine alma:

$ax+bx = x.(a+b)$

$x^2-2x = x.(x-2)$

$ab^2-ba^2 = ab.(b-a)$

$x^2y - y = y.(x^2-1)$

$x^2-2xy = x(x-2y)$

$(x+1).a + b.(x+1) = (x+1).(a+b)$

1) $\frac{a^2-2ab}{2b^2-ab}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{a(a-2b)}{-b(a-2b)} = -\frac{a}{b}$

2) $\frac{a^2x-ax^2}{a-x}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{ax(a-x)}{a-x} = ax$

• gruplandırarak çarpanlarına ayırma:

$ax+bx+ay+by = x(a+b)+y(a+b)$
$= (a+b).(x+y)$

$x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1)$
$= (x-1).(x^2+1)$

$xy-4x-4y+16 = x(y-4)-4(y-4)$
$= (y-4).(x-4)$

3) $x+y=4$ ve $x-z=1$ ise $x^2+xy-xz-yz$ ifadesinin değeri nedir?

$x^2+xy-xz-yz = x(x+y)-z(x+y)$
$= \underbrace{(x+y)}_{4}.\underbrace{(x-z)}_{1} = 4$

ya da denklemleri sağlayan bir değer bulunur ve yerine yazılır.

$x+y=4$ ve $x-z=1$
$x=2,\ y=2$; $x=2,\ z=1$

$= x^2+xy-xz-yz = 4+4-2-2 = 4$

4) $x+y=5$ ve $x-y=1$ ise $x^2-y^2+3x+3y$ ifadesinin eşiti nedir?

$x^2-y^2+3x+3y = (x-y).(x+y)+3(x+y)$
$= \underbrace{(x+y)}_{5}.\underbrace{(x-y+3)}_{1} = 5.4 = 20$

5) $\frac{a^2-ba-a+b}{a-1}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{a(a-b)-(a-b)}{a-1} = \frac{(a-b).(a-1)}{a-1} = a-b$

6) $\frac{4ab-2a-2b^2+b}{2a-b}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{2a(2b-1)-b(2b-1)}{2a-b} = \frac{(2b-1).(2a-b)}{2a-b}$
$= 2b-1$

7) $\frac{3ab-3xb+xy-ay}{x-a}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{3b(a-x)-y(a-x)}{x-a} = \frac{\overset{-1}{(a-x)}.(3b-y)}{x-a} = y-3b$

8) $\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x-x^2+x^3}.(1-x)^2$ ifadesinin eşiti nedir?

$= \frac{(1+x)+x^2(1+x)}{(1-x)-x^2(1-x)}.(1-x)^2$

$= \frac{(1+x).(1+x^2)}{(1-x).(1-x^2)}.(1-x)^2$

$= \frac{(1+x).(1+x^2)}{(1-x).(1-x).(1+x)}.(1-x)^2 = 1+x^2$

• İki kare farkı:

$x^2-y^2 = (x-y).(x+y)$

$x^2-1 = (x-1).(x+1)$

$a^2-4 = (a-2).(a+2)$

$4a^2-1 = (2a-1).(2a+1)$

$9-16x^2 = (3-4x).(3+4x)$

$x^2-\frac{4}{y^2} = (x-\frac{2}{y}).(x+\frac{2}{y})$

• **Tam kare:**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc)$

$(x+1)^2 = x^2+2x+1$

$(x-3)^2 = x^2-6x+9$

$(2x-1)^2 = 4x^2-4x+1$

$(2x-3y)^2 = 4x^2-12xy+9y^2$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2-2+\frac{1}{x^2}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$

9) $(a+1)^2-(a-1)^2$ ifadesinin eşiti nedir?

$= a^2+2a+1-(a^2-2a+1)$

$= a^2+2a+1-a^2+2a-1 = 4a$

10) $a+b+c = A$
$a-b-c = B$ ise A^2-B^2 nin eşiti nedir?

$A^2-B^2 = (a+b+c)^2-(a-b-c)^2$

$= (a+b+c+a-b-c).(a+b+c-a+b+c)$

$= 2a.(2b+2c) = 4a.(b+c)$

11) $a-b = b-c = 5$ ise $a^2+c^2-2b^2$ ifadesinin eşiti nedir?

$a^2+c^2-2b^2 = (a^2-b^2)+(c^2-b^2)$

$= \underbrace{(a-b)}_{5}.(a+b) + \underbrace{(c-b)}_{-5}.(c+b)$

$= 5a+5b-5c-5b$

$= 5a-5c = 5\underbrace{(a-c)}$

a-c yi bulmak için

$a-b = 5$
$+\; b-c = 5$
$a-c = 10$

$= 5.10 = 50$

• ya da $a-b=b-c=5$ denklemini sağlayan
($a=11$, $b=6$, $b=6$, $c=1$)
(a,b,c) üçlüsü bulunur ve yerine yazılır.

12) $\left(1+\frac{5}{b}\right):\left(1-\frac{25}{b^2}\right)$ ifadesinin eşiti nedir?

$\left(\frac{b+5}{b}\right):\left(\frac{b^2-25}{b^2}\right) = \frac{b+5}{b} : \frac{(b-5).(b+5)}{b^2}$

$= \frac{b+5}{b}\cdot\frac{b^2}{(b+5).(b-5)} = \frac{b}{b-5}$

13) $\frac{x^2-1}{x-1} : \frac{x+1}{x^2+1}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{(x-1).(x+1)}{(x-1)}\cdot\frac{x^2+1}{x+1} = x^2+1$

14) $\frac{x+5}{5-x} : \left(1+\frac{10}{x-5}\right)$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{x+5}{5-x} : \left(\frac{x+5}{x-5}\right) = \frac{x+5}{-(x-5)}\cdot\frac{x-5}{x+5} = -1$

15) $\frac{a}{a+1} - \frac{1-a}{a^2-1}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{a}{a+1}_{(a-1)} - \frac{1-a}{(a-1).(a+1)} = \frac{a^2-a}{(a+1).(a-1)} - \frac{1-a}{(a+1).(a-1)}$

$= \frac{a^2-a-1+a}{(a-1).(a+1)} = \frac{a^2-1}{a^2-1} = 1$

16) $120^2-117^2 = 3p$ ise p nedir?

$(120-117).(120+117) = 3p$

$3.237 = 3p \Rightarrow p = 237$

17) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$, $a^2+b^2 = 24$ ise $a.b$ ne olabilir?

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a+b = a.b$ (her iki tarafın karesi alınırsa)

$a^2+2ab+b^2 = a^2b^2$

$24+2ab = a^2b^2$

$24+2(ab) = (ab)^2$

$ab = t$ olsun.

$t^2-2t-24 = 0$
$t \quad -6$
$t \quad +4$ } $t=6$ ya da $t=-4$

$a.b = 6$
$a.b = -4$

18) $a>0$ ve $b>0$ olmak üzere

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ ve $a^2+b^2=12$ ise $a+b$ nedir?

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 \Rightarrow a+b=2ab$

$a^2+2ab+b^2=4a^2b^2$

$12+2ab=(2ab)^2$

$2ab=t$ olsun

$12+t=t^2$

$t^2-t-12=0$

$t \quad -4$

$t \quad +3$

$\Rightarrow t=4$ ya da $t=-3$

$2ab=4$ $\quad a+b \neq -3$

$a+b=4$

19) $\frac{x(y+z)+z(y-x)}{x^2+xy+xz+yz}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$\frac{xy+xz+zy-zx}{x^2+xy+xz+yz}=\frac{y(x+z)}{x(x+y)+z(x+y)}$

$=\frac{y\cdot(x+z)}{(x+y)\cdot(x+z)}=\frac{y}{x+y}$

20) x^2+2x-a^2+1 ifadesini çarpanlarına ayırınız?

$x^2+2x+1-a^2=(x+1)^2-a^2=(x+1+a).(x+1-a)$

21) $x+y+z=6$ ve $x^2+y^2+z^2=14$ ise $xy+xz+yz$ nedir?

$x+y+z=6$ (karesi alınırsa)

$x^2+y^2+z^2+2.(xy+xz+yz)=36$

$14+2.(xy+xz+yz)=36$

$2.(xy+xz+yz)=22$

$xy+xz+yz=11$

22) $x,y,z \in Z^+$

$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ ve $x^2+xz+2xy=1$ ise $x+y$ nedir?

$y^2=xz \Rightarrow x^2+y^2+2xy=1$

$(x+y)^2=1 \Rightarrow x+y=1$

23) $a-\frac{1}{a}=2\sqrt{3}$ ise $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ nedir?

$a-\frac{1}{a}=2\sqrt{3} \Rightarrow a^2-2+\frac{1}{a^2}=12 \Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=14$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}=16$

24) $x^2-y^2=27$ ve $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{4}{9}$ olduğuna göre y kaçtır?

$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{4}{9}$
$(x-y) \quad (x+y)$

$\frac{2x}{27}=\frac{4}{9} \Rightarrow 18x=108$

$x=6.$

$x^2-y^2=27 \Rightarrow 36-y^2=27 \Rightarrow y^2=9$

$y=\pm 3$

25) $3x+\frac{1}{3x}=10$ ise $\frac{81x^4+1}{9x^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

$\frac{81x^4+1}{9x^2}=9x^2+\frac{1}{9x^2}$

$3x+\frac{1}{3x}=10 \Rightarrow 9x^2+2+\frac{1}{9x^2}=100 \Rightarrow 9x^2+\frac{1}{9x^2}=98$

26) $x-\frac{1}{x}=4$ ise $x+\frac{1}{x}$ 'in pozitif değeri nedir?

$x-\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=16 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=18$

$x+\frac{1}{x}=A$ olsun

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=A^2 \Rightarrow 20=A^2 \Rightarrow A=2\sqrt{5}$

27) $x^2-5x+1=0$ ise $x^2+\frac{1}{x^2}$ nedir?

$x^2-5x+1=0 \Rightarrow x-5+\frac{1}{x}=0$

$x+\frac{1}{x}=5$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=25 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23$

28) a, b birer reel sayıdır.
$a^2+b^2-2a-6b+10=0$ ise a.b nedir?

$a^2-2a+1+b^2-6b+9=0$

$(a-1)^2+(b-3)^2=0 \Rightarrow a=1$ ve $b=3$

$a.b=3$

29) $x^2-10x+y^2+4y+37$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

$x^2-10x+25+y^2+4y+4+8$

$\underbrace{(x-5)^2}_{0}+\underbrace{(y+2)^2}_{0}+8=8$

• **Terim ekleyip, terim çıkartma yöntemi:**

30) x^4+64 ifadesini çarpanlarına ayırınız?

$(x^2+8)^2=x^4+16x^2+64$

$16x^2$ bir eklenip, bir çıkarılacak.

$x^4+64+16x^2-16x^2=(x^2+8)^2-(4x)^2$

$=(x^2+8+4x).(x^2+8-4x)$

31) x^4+x^2+25 ifadesini çarpanlarına ayırınız?

$(x^2+5)^2=x^4+10x^2+25$

$x^4+x^2+25+9x^2-9x^2=(x^2+5)^2-(3x)^2$

$=(x^2+5-3x).(x^2+5+3x)$

32) a^4+a^2+1 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$(a^2+1)^2=a^4+2a^2+1$

$a^4+a^2+1+a^2-a^2=(a^2+1)^2-a^2$

$=(a^2+1-a).(a^2+1+a)$

• **Tam küp açılımı:**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
⋮

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

• **İki küp farkı ve toplamı:**

$x^3-y^3=(x-y).(x^2+xy+y^2)$

$x^3+y^3=(x+y).(x^2-xy+y^2)$

$x^3+1=(x+1).(x^2-x+1)$

$x^3+8=(x+2).(x^2-2x+4)$

$x^3-125=(x-5).(x^2+5x+25)$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3.x.y.(x-y)$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3.x.y.(x+y)$

• **ax^2+bx+c biçimindeki ifadelerin çarpanlarına ayrılması:**

$x^2+12x+32=(x+4).(x+8)$

x   +4
x   +8

$2x^2-7x-4=(2x+1).(x-4)$

2x   +1
x   −4

$6x^2+11x+3=(3x+1).(2x+3)$

3x   +1
2x   +3

$20x^2-x-12=(5x-4).(4x+3)$

5x   −4
4x   +3

33) $x-y=5$ ve $x.y=24$ ise x^3-y^3 ifadesinin eşiti nedir?

$x^3-y^3=(x-y)^3+3.x.y.(x-y)$
$=125+3.24.5$
$=125+360$
$=485$

34) x,y birer reel sayıdır.
$3xy^2+x^3=9$
$3x^2y+y^3=18$ ise $x+y$ nedir?

• taraf tarafa toplanırsa;
$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=27$
$(x+y)^3=27 \Rightarrow x+y=3$

35) $\dfrac{a^{-1}+a^2}{a+a^{-2}}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{\frac{1}{a}+a^2}{a+\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{a^3+1}{a}}{\frac{a^3+1}{a^2}}=\frac{\cancel{a^3+1}}{a}\cdot\frac{a^2}{\cancel{a^3+1}}=a$$

36) $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{(a+b).(\cancel{a^2-ab+b^2})}{\cancel{a^2-ab+b^2}}=a+b$$

37) x ve y pozitif gerçel sayıları için
$x.y=5$
$x^2+y^2=15$ ise x^3+y^3 nedir?

önce $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
$(x+y)^2=25 \Rightarrow x+y=5$ bulunur.

$x^3+y^3=(x+y)^3-3.x.y.(x+y)$
$=125-3.5.5$
$=125-75$
$=50$

38) $\left(\dfrac{2+m}{1-m}\cdot\dfrac{a^2-1}{4-m^2}\right):\dfrac{a^2+2a-3}{m^2-3m+2}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{\cancel{2+m}}{\cancel{1-m}}\cdot\frac{(\cancel{a-1}).(a+1)}{(\cancel{2-m}).(\cancel{2+m})}\cdot\frac{(\cancel{m-2}).(\cancel{m-1})}{(a+3).(\cancel{a-1})}=\frac{a+1}{a+3}$$

39) $2a+3-\dfrac{2a^2+3a-9}{2a-3}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$2a^2+3a-9$
$2a \quad -3$
$a \quad +3$

$$2a+3-\frac{(\cancel{2a-3}).(a+3)}{\cancel{2a-3}}=2a+3-a-3=a$$

40) $\dfrac{a+a^{-2}}{1-a^{-1}+a^{-2}}$ ifadesinin eşiti nedir?

$$\frac{a+\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{a^3+1}{\cancel{a^2}}}{\frac{a^2-a+1}{\cancel{a^2}}}=\frac{(a+1).(\cancel{a^2-a+1})}{\cancel{a^2-a+1}}=a+1$$

41) $\dfrac{abx^2-(a+b).x+1}{ax-1}$ ifadesinin en sade halini yazınız?

$abx^2-(a+b).x+1=(ax-1).(bx-1)$
$ax \quad -1$
$bx \quad -1$

$$\frac{(\cancel{ax-1}).(bx-1)}{\cancel{ax-1}}=bx-1$$

42) $\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+5x}:\dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-5}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{x^2+x+1}{x(2x+5)}:\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{(2x+5).(x-1)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2+x+1}}{x.(\cancel{2x+5})}\cdot\frac{(\cancel{2x+5}).(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1}).(\cancel{x^2+x+1})}$$

$$=\frac{1}{x}$$

43) $\dfrac{a^2-2a-3}{\left(\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{3}{a}-1\right)}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{(a-3).(a+1)}{\frac{a+1}{a}\cdot\frac{3-a}{a}} = (a-3).(a+1).\frac{a^2}{(a+1).(3-a)} = -a^2$$

44) $\dfrac{(x^2-y^2).(x^2+xy+y^2)}{(x^3-y^3).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{(x-y).(x+y).(x^2+xy+y^2)}{(x-y).(x^2+xy+y^2).\left(\frac{x+y}{xy}\right)} = (x+y).\frac{xy}{x+y} = xy$$

45) $\dfrac{1}{x+1}+x-1=\dfrac{1}{x^2}$ ise x^3-1 nedir?

$$\frac{1+x^2-1}{x+1}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^4=x+1$$

$$x^3=1+\frac{1}{x} \Rightarrow x^3-1=\frac{1}{x}$$

46) $\left(\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{1-x}\right)$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\underset{(1-x)}{\frac{x}{1+x}}-\underset{(1+x)}{\frac{1}{1-x}}=\frac{x-x^2-1-x}{1-x^2}=\frac{-x^2-1}{1-x^2}$$

$$\underset{(1-x)}{\frac{1}{x+1}}+\underset{(1+x)}{\frac{x}{1-x}}=\frac{1-x+x+x^2}{1-x^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$=\frac{-x^2-1}{1-x^2}:\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$=-\frac{(1+x^2)}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$=-1$$

47) $\dfrac{a^4-a^3}{a^4+a^2}:\dfrac{a^2-a}{a^2+1}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{a^3(a-1)}{a^2(a^2+1)}\cdot\frac{a^2+1}{a(a-1)}=1$$

48) $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+11x+28}\cdot\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9}=\dfrac{x+2}{x+3}$ olduğuna göre $a+b$ nedir?

$$\frac{x^2+ax+b}{(x+4).(x+7)}\cdot\frac{(x+7).(x-3)}{(x-3).(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x+4}=x+2$$

$$x^2+ax+b=(x+2).(x+4)$$

$$x^2+ax+b=x^2+6x+8$$

$$\left.\begin{aligned}a=6\\b=8\end{aligned}\right\}14$$

49) Birbirinden farklı a, b sayıları için

$\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}=b-a$ ise $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ nedir?

$$\frac{a^3-b^3}{ab}=b-a$$

$$\frac{(a-b).(a^2+ab+b^2)}{ab}=-(a-b)$$

$$a^2+ab+b^2=-ab$$

$$a^2+2ab+b^2=0$$

$$(a+b)^2=0 \Rightarrow a+b=0$$

$$a=-b$$

$$\frac{a}{b}=-1 \text{ ve } \frac{b}{a}=-1$$

$$-1+(-1)=-2$$

50) x, y gerçel sayıları için

$x^2-4y=-7$

$y^2-2x=2$ olduğuna göre $x+y$ nedir?

• Verilen iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$x^2-2x+y^2-4y+5=0$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=0$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}x=1\\y=2\end{aligned}\right\} ③$$